第一章 概率论的基本概念

一、重点与难点

（1）事件之间的关系与运算

（2）概率的公理定义及概率的性质和应用；

（加法公式、减法公式）

（3）古典概型的计算

（4）条件概率和三大公式---乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式

（5）事件的独立性和贝努利试验和二项概率。

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

可推广 $\overline{\bigcup_k A_k} = \bigcap_k \overline{A_k}, \quad \overline{\bigcap_k A_k} = \bigcup_k \overline{A_k}.$

容易出现的错误

$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \neq \overline{ABC}$ $\overline{ABC}$ =S-ABC， $\overline{ABC} \neq$ 1-ABC

练习1 设 A、B、C 为样本空间 S 中的三个随机事件，试用 A、B、C 的运算表示下列随机事件：

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生；　$A\bar{B}\bar{C}$

(2) A、B、C 都不发生；　$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

(3) A、B、C 中恰好有一个发生；　$A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$

(4) A、B、C 中至少有两个发生；　$AB\cup AC\cup BC$ 或

$\bar{A}BC\cup A\bar{B}C\cup AB\bar{C}\cup ABC$

(5) A、B、C 中至少有一个发生；　$A\cup B\cup C$

(6) A、B、C 中恰好有两个发生.　$AB\bar{C}\cup\bar{A}BC\cup A\bar{B}C$

概率的性质

性质1 $P(\varnothing)=0$

性质2 (有限可加性)：设A_1，A_2，…A_n 是n个两两互不相容的事件,则

$$P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots P(A_n);$$

性质3 $P(\overline{A})=1-P(A)$

性质4 若 $A\supset B$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$

$$P(A)\geq P(B)$$

性质5 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$

性质6 (加法公式)

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

1. 条件概率 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

2. 乘法公式

$$P(AB)=P(B)P(A|B)$$

$$P(AB)=P(A)P(B|A)$$

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB).$$

$$P(A_1A_2\dots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\dots$$
$$P(A_{n-1}|A_1A_2\dots A_{n-2}).P(A_n|A_1A_2\dots A_{n-1})$$

全概率公式与贝叶斯公式

定理：设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为一组两两互不相事件，即

$B_i B_j = \phi \quad (i \neq j)$ 并且 $\bigcup B_i = S$

则对任一随机事件**A**，有

$$P(A) = P(AS) = P(\bigcup_{i=1}^{n} AB_i) = \sum_{i=1}^{n} P(AB_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)$$

$$\boldsymbol{P(B_k / A) = \frac{P(B_k A)}{P(A)} = \frac{P(B_k) P(A / B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A / B_i)},}$$

一、填空

1. 一批产品中有 6 个正品 2 个次品，任意取两次，每次一个，取出后不放回，则第二次取出是次品的概率为____________.

2. 设 A, B, C 是三个事件，且 P(A)=0.7, P(B)=0.3, P(A-B)=0.5, 则 $P(A\overline{B}) =$ ____________ ，

$P(\overline{AB}) =$ ____________ .

3. 设 A,B,C 为三事件，则事件 A,B,C 中恰有一个发生可表示为____________________，A,B,C 至少有一个发生可表示为____________________。

认真审题，看清是求事件还是求事件的概率

常见错误：

1. 把事件写成事件的概率
2. 让求事件的概率，只写出了事件，没求概率
3. 事件表示错误

二、1. 甲、乙、丙三组工人加工同样的零件，加工的零件放在一起，三组工人加工的零件各占 30%，60%，10%，他们生产的产品的次品率分别为 1%、2%和 3%，试求：（1）任取一产品，它是次品的概率；（2）任取一产品，发现是次品，则它是由甲组加工的概率。

2. 口袋中装有 20 枚硬币，其中 5 枚废品（即两面都是国徽），先从口袋中随机的取出一枚硬币，并将它独立的抛四次，（1）求向上的一面全是国徽的概率；（2）若发现向上的一面全是国徽，求这枚硬币是废品的概率。

第二、 三章 随机变量及其分布

随机变量

- 一维随机变量
  - 描述R.V统计特征的几个工具——分布列、密度函数、分布函数的定义、性质
  - 常见离散型R.V 和连续型R.V
  - 一维随机变量函数的分布
- 二维随机变量
  - 联合分布
  - 边缘分布
  - 条件分布
  - 独立性的判断
  - 二维R.V函数的分布

一、重点与难点

1、一维随机变量

（1）一维随机变量的概率分布：熟练掌握形成分布律、分布函数、密度函数的充要条件

（2）一维重要分布及其特性、符号（二项分布、泊松分布的概率最值，指数分布的无记忆性、正态分布的对称性等）；

（3）一维随机变量函数的分布---分布函数法

2、二维随机变量重点与难点

（1）二维随机变量的概率分布：联合、边缘、条件分布及其相互关系，随机变量相互独立的判断和应用

（2）二维重要分布及其特性、符号（二维均匀分布，二维正态分布）；

（3）二维随机变量函数的分布---和的分布、最大值、最小值的分布，某些分布对参数的可加性

二、主要知识点

分布律 ----离散型随机变量　　密度函数 ----连续型R.V

$$P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\cdots \qquad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

性质

（1）$p_k \geq 0$, k=1,2, …　　（1）$f(x) \geq 0$

（2）$\sum_k p_k = 1$　　（2）$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

(3) $P(x \leq X \leq y) = \sum_{x \leq x_k \leq y} P_k$　　(3) $P\{x_1 < X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

(4) $F(x) = \sum_{x_k \leq x} P_k$　　(4) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

（5）若 $f(x)$ 在点 x 处连续，则

$$F'(x) = f(x)$$

一维离散型随机变量

$$P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\cdots$$

性质

（1）$p_k \geq 0,\quad k=1,2,\ldots$

（2）$\sum_k p_k = 1$

(3) $P(x \leq X \leq y) = \sum_{x \leq x_k \leq y} P_k$

(4) $F(x) = \sum_{x_k \leq x} P_k$

二维离散型随机变量

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, i,j=1,2,\cdots$$

(1) $p_{ij} \geq 0,\quad i,j=1,2,\cdots$

(2) $\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij} = 1$

（3）$P((X,Y)\in D) = \sum_{(x_i,y_j)\in D} p_{ij}$

(4) $F(x,y) = \sum_{x_i \leq x}\sum_{y_j \leq y} p_{ij}$

一维连续型随机变量

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

（1） $f(x)\geq 0$

（2） $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$

(3) $P\{x_1<X\leq x_2\}=\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{f}(x)dx$

（4）若 $f(x)$ 在点 x 处连续，

$$F'(x)=f(x)$$

二维连续型随机变量

$$\mathrm{F}(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{f(u,v)dudv}$$

（1） $\mathrm{f}(x,y)\geq 0$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{f(x,y)dxdy}=1$

$$\mathrm{P}\big((x,y)\in \mathrm{G}\big)=\iint_{\mathrm{G}}\mathrm{f}(x,y)dxdy$$

（4）在 $f(x,y)$ 的连续点，

$$\mathrm{f}(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$$

边缘分布

$$F_X(x)=P\{X\le x\}=F(x,+\infty)$$

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=F(+\infty,y)$$

$$\mathrm{f}_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx \quad (-\infty<y<\infty)$$

$$\mathrm{f}_X(\mathrm{x})=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy,\ (-\infty<x<+\infty)$$

$$P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} \quad (i=1,2,\cdots)$$

常见错误:

1. 自变量范围书写错误
2. 积分限错误

$$P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} \quad (j=1,2,\cdots)$$

条件分布

$$F_{X|Y}(x|y_j)=\sum_{x_i\le x} p_{i|j}$$

$$P(X=x_i|Y=y_j)=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}\triangleq p_{i|j}$$

$$i=1,2,\cdots$$

$$F(y|x_i)=\sum_{y_j\le y} p_{j|i}$$

$$P(Y=y_j|X=x_i)=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}\triangleq p_{j|i}$$

$$j=1,2,\cdots$$

$f_Y(y)>0$,

$$F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$f_X(x)>0$

$$F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y}\frac{f(x,v)}{f_X(x)}dv$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

随机变量独立性的判断

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow$ 若对任意的 x, y, 有

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

连续型R. V. X 和 Y 独立 $\Leftrightarrow$ $f(x,y)\overset{a.e.}{=}f_X(x)f_Y(y)$

连续型R. V. X和Y不独立 $\Leftrightarrow$ 存在面积不为0的区域 D，当$(x,y)\in D$时，$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$

离散型R. V. X和Y独立 $\Leftrightarrow$ 对(X,Y)的所有可能取值(x_i, y_j)

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$$

离散型R. V. X和Y不独立 $\Leftrightarrow$ 存在(X,Y)的某个可能取值(x_{i0}, y_{j0}),

$$s.t.\ \ P(X=x_{i0},Y=y_{j0})\neq P(X=x_{i0})P(Y=y_{j0})$$

三、几种重要的随机变量

1、几种重要的离散型随机变量

（1） 二点分布（**0—1**分布）

$$P(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x}, \quad x = 0, 1$$

(2) 二项分布 $X \sim b(n, p)$

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \cdots, n$$

$$E(X) = np, D(X) = np(1 - p)$$

(3) 泊松（Poisson）分布 $X \sim \pi(\lambda)$ 或 $P(\lambda)$

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

$$E(X) = \lambda, D(X) = \lambda$$

2、几种重要的连续型随机变量的密度函数：

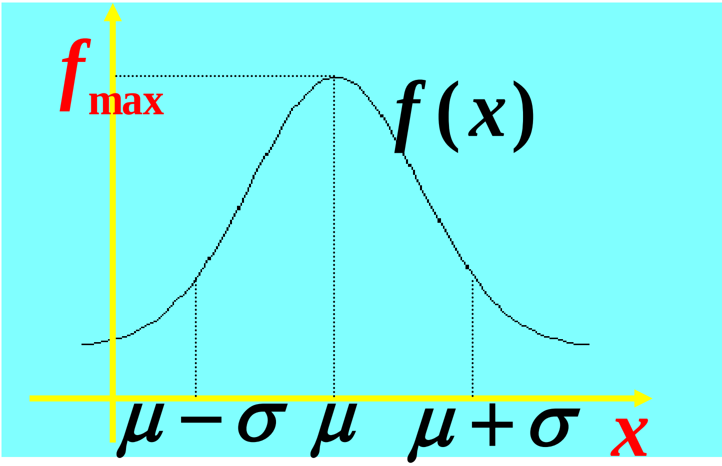
(1)均匀分布：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$　记为 $X \sim U[a,b]$

$$E(X)=\frac{a+b}{2},\ D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

(2)指数分布：$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0 \\ 0 & x\le 0\end{cases}$　$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0 \\ 0 & x\le 0\end{cases}$

$$E(X)=\frac{1}{\lambda},\ D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

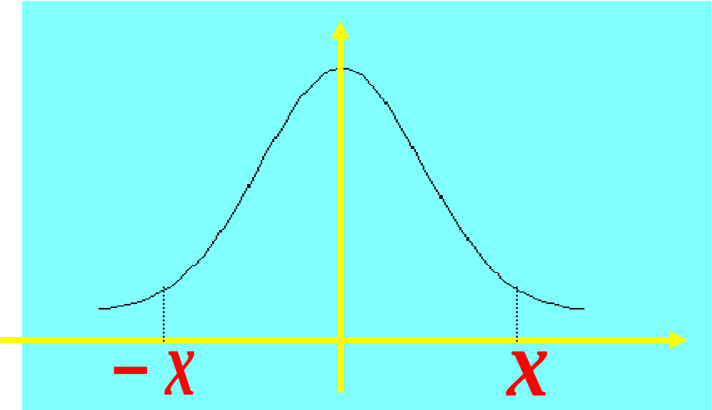
(3)正态分布：$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$　记为 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$



$$E(X)=\mu,\ D(X)=\sigma^2$$

关于标准正态分布的结论：

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1$



(2) $\Phi(0) = \frac{1}{2}$

(3) $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \quad (x > 0)$

(4) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $P(X \le x) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

3、二维均匀分布和二维正态分布

(1) 二维均匀分布

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S(D)} & (x,y)\in D\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

(2) 二维正态分布 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ $\quad Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

X与Y相互独立的充要条件是参数$\rho=0$ $\qquad \rho=\rho_{XY}$

若X和Y独立，$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$,

$$Z=aX+bY+c\sim N(a\mu_1+b\mu_2+c,a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2)$$

四、随机变量函数的分布

1、一维随机变量函数的分布

（1）分布函数法：$F(y)=P(g(X)\le y)$

特别地，$Y=X^2$ 的分布密度为：

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})] & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

（2）公式法：$X\sim f_X(x)$，设 $g(x)$ 处处可导且 $g'(x)>0$ 或 $g'(x)<0$，则 $Y=g(X)$ 的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X[h(y)]\,|h'(y)| & \alpha<y<\beta\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

2、 连续型随机变量函数的分布

$$(X,Y) \sim f(x,y), Z=g(x,y), 求 f_Z(z)$$

一. 分布函数法

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(g(X,Y)\le z)$$

$$=\iint\limits_{g(x,y)\le z} f(x,y)dxdy$$

例1：设X、Y相互独立，且都服从相同的分布 N(0,1)，求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的分布密度 $f_Z(z)$

解：由题意

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\qquad -\infty<x<+\infty$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}},\qquad -\infty<y<+\infty$$

$\therefore$ (X,Y)的联合分布密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\ (x,y)\in R^2$$

当 $z \le 0$ 时，　$F_Z(z) = 0$

当 $z > 0$ 时，

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{\sqrt{X^2 + Y^2} \le z\}$$

$$= \iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2} \le z} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy$$

$$F_Z(z) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} rdr$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} ze^{-\frac{z^2}{2}} & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$

~瑞利(Ray Leigh)分布

1、 $Z=X+Y$ 的分布

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)dx$$

若 X 和 Y 独立

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)dy$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx$$

2、$M=\max(X,Y)$及$N=\min(X,Y)$的分布

$$F_M(z)= F_X(z)F_Y(z)$$

$$F_N(z)= 1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

第四章 随机变量的数字特征

一、重点与难点

（1）一维随机变量的数学期望、方差（计算公式、性质）

（2）一维、二维随机变量函数的数学期望（计算公式）

（3）协方差、相关系数、协方差矩阵的计算公式性（协方差、相关系数的性质）

（4）随机变量相关性的判断

1. 数学期望的定义

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k \qquad E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$$

2．一、二维随机变量函数的数学期望：

$$E(Y)=E(g(X))=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k$$

$$E(Y)=E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$$

$$E(Z)=E(g(X,Y))=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{i,j}$$

$$E(Z)=E(g(X,Y))=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$$

3．二维随机变量(X,Y)的数学期望：(E(X),E(Y))

$$Z=g(X,Y)=X,\quad Z=g(X,Y)=Y$$

$$E(Z)=E(g(X,Y))=E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x_i p_{i,j}$$

$$E(Z)=E(g(X,Y))=E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy$$

4、数学期望的性质

1) $E(c) = c$ ，其中 c 是常数

2) $\boldsymbol{E(cX) = cE(X)}$， c 为常数，X为随机变量

3) 设X，Y是任意两个随机变量，则

$$\boldsymbol{E(X+Y) = E(X) + E(Y)}$$

数学期望是线性函数

$$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$$

4、数学期望的性质

3) 设X，Y是任意两个随机变量，则

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

推论：设 $X_1, X_2, \ldots X_n$是n个任意的随机变量，

$E(X_1), E(X_2), \ldots E(X_n)$ 都存在，则

$$E(\sum_{i=1}^{n} X_i)=\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

4) 设X，Y为两相互独立的随机变量，$E(X),E(Y)$ 都存在，

则 $$E(XY)=E(X)E(Y)$$

注意:反过来不一定成立.

一、方差的定义

$$D(X)=Var(X)=E[X-E(X)]^2=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ X的标准差或均方差。

二、方差的性质

① $D(c)=0$ ② $D(cX)=c^2D(X)$

③ 设X和Y是两个随机变量， $D(X),D(Y)$ 存在，则有

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2E\big((X-E(X))(Y-E(Y))\big)$$

若X和Y相互独立，则 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$

$$D(aX+bY+c)=a^2D(X)+b^2D(Y)$$

④ $D(X)=0$ 的充要条件是：X依概率 1 取常数 c，即

$$P\{X=c\}=1$$

三、切比雪夫不等式

定理 设随机变量X具有数学期望 $E(X)=\mu$ ，方差

$D(X)=\sigma^2<\infty$ 则对 $\forall\varepsilon>0$

$$P\left(|X-E(X)|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}=\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

或

$$\mathrm{P}\{|\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X})|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

1、 协方差的定义

$$Cov(X,Y) = E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

当$Y=X$时，$\mathrm{Cov}(X,X)=E(X\text{-}EX)^2=\mathrm{Var}(X)$

2、 协方差的常用计算公式:

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

3、相关系数（Correlation coefficient）

$$\rho_{XY}=\mathrm{Corr}(X,Y)=\mathrm{Cov}(X^*,Y^*)$$

$$\mathrm{Corr}(X,Y)=E\left(\frac{(X-E(X))(Y-E(Y))}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}\right)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$$

相关系数的性质

性质1 $-1 \le \rho_{XY} \le 1$

性质2 $\boxed{\rho_{XY} = \pm 1}$ $\Longleftrightarrow$

X与Y几乎处处有线性关系即存在$a(a \neq 0), b$，使得
$$P(Y = aX + b) = 1$$

其中当$\rho_{XY} = 1$时,有$a > 0$，当$\rho_{XY} = -1$时,有$a < 0$.

若X与Y 的相关系数 $\rho_{XY} = 0$ 则称X与Y 不相关。

第五章 大数定律和中心极限定理

一、重点与难点

（1）切比雪夫不等式、大数定律

（2）中心极限定理的应用---填空题、计算题

多个独立同分布随机变量和的概率近似计算—用正态分布近似

1、独立同分布的中心极限定理

定理1 林德贝格–勒维中心极限定理

设随机变量序列$\{X_n\}$独立同分布，且有期望和方差：

$$E(X_k)=\mu,\ \mathrm{Var}(X_k)=\sigma^2>0,\ k=1,2,\cdots$$

则对于任意实数 x， $F_n(x)\xrightarrow{W}\Phi(x)$

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\le x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x)$$

$$Y_n^*\xrightarrow{L}Y\sim N(0,1).$$

此定理说明，不论$X_1, X_2, \cdots X_n, \cdots$ 原来服从什么分布，只要是独立同分布，当 n 足够大时，总可以近似地认为

$$Y_n^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1)$$

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\text{近似}}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2),$$

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\text{近似}}{\sim} N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

$\varepsilon =$

练习题和作业

1、设随机变量X具有数学期望 $E(X)=\mu$,方差 $D(X)=\sigma^2$

则由切比雪夫不等式，对 $\forall\varepsilon>0$, 有 $P(|X-\mu|<\varepsilon)>$ $1-\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

2、若随机变量X服从[-1,b]上的均匀分布, 且有切比雪夫不等式

$P(|X-1|<\varepsilon)\geq\dfrac{2}{3}$ ，则b= 3， $\varepsilon =$ 2 .

$$E(X)=\frac{b-1}{2}=1\Rightarrow b=3$$ 则由切比雪夫不等式

$$P(|X-1|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}=\frac{2}{3}$$ 而 $$D(X)=\frac{(b+1)^2}{12}=\frac{4}{3}$$

$$\therefore\frac{D(X)}{\varepsilon^2}=\frac{4}{3\varepsilon^2}=\frac{1}{3}$$ $$\therefore\varepsilon=2$$

4. 设 $X_1, X_2, \cdots X_{600}$ 相互独立，且均在(0,1) 上服从均匀分布，

则由中心极限定理有 $P\left(\sum_{i=1}^{600} X_i > 300\right) \approx$ ____________

解：记$X=\sum_{i=1}^{600} X_i$，由$X_i \sim U(0,1)$知　$E(X_i)=\frac{1}{2}$，$D(X_i)=\frac{1}{12}$，i=1, 2,⋯, 600

由独立同分布的中心极限定理 $Y_{600}^{*}=\dfrac{\sum_{i=1}^{600} X_i - 600\times 0.5}{\sqrt{600\times\frac{1}{12}}}$

近似服从 $N(0,1)$分布。

$$P(X>300)=P\left\{\frac{X-300}{\sqrt{50}}>\frac{300-300}{\sqrt{50}}\right\}$$

$$\approx 1-\Phi(0)=0.5$$

5.计算器在进行加法时，将每个加数取最靠近它的数据。设所有的舍入误差是独立的。且在(-0.5,0.5)上服从均匀分布。

(1)若将1500个数相加，问误差总和的绝对值超过15的概率是多少

解：设X表示随机变量，则舍入误差X~U(-0.5,0.5)

$$E(X)=0, D(X)=\frac{1}{12}$$

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{1500} X_i\right| > 15\right\} = 1 - P\left\{\left|\sum_{i=1}^{1500} X_i\right| \le 15\right\} = 1 - P\left\{-15 < \sum_{i=1}^{1500} X_i < 15\right\}$$

$$= 1 - P\left\{\frac{-15 - 1500\times 0}{\sqrt{1500\times 1/12}} \le \frac{\sum_{i=1}^{1500} X_i - 1500\times 0}{\sqrt{1500\times 1/12}} \le \frac{15 - 1500\times 0}{\sqrt{1500\times 1/12}}\right\}$$

$$\approx 1 - [\Phi(1.341) - \Phi(-1.341)] = 2[1 - \Phi(1.341)]$$

$$= 0.182$$

(2)最多可以有几个数相加使得误差总和的绝对值小于10的概率不小于0.9？

解：设最多可以有n个数相加使得误差总和绝对值小于10

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right| < 10\right\} = P\left\{-10 < \sum_{i=1}^{n} X_i < 10\right\}$$

$$= \mathrm{p}\left\{\frac{-10 - \mathrm{n}\times 0}{\sqrt{\mathrm{n}/12}} \le \frac{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{X}_{\mathrm{i}} - \mathrm{n}\times 0}{\sqrt{\mathrm{n}/12}} \le \frac{10 - \mathrm{n}\times 0}{\sqrt{\mathrm{n}/12}}\right\} \ge 0.9$$

解之得：$\dfrac{10}{\sqrt{n/12}} = 1.65$ $\quad n = 441$

第六章 样本及抽样分布

1、熟练掌握统计的三大分布一卡方分布、t分布、F分布的定义和性质

2、会利用三大分布的定义求相关统计量的分布和进行概率的计算

3、熟练掌握正态总体样本均值、样本方差的分布及性质

1、样本均值

样本均值 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

2、样本方差与样本标准差

样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$

样本标准差 $S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}$

3、样本矩

样本k阶原点矩 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$

样本k阶中心矩 $B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^k$

三大抽样分布

一、χ^2 分布(卡方分布)

定义1 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立,

且都服从标准正态分布 $N(0, 1)$, 称

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

服从自由度为 n 的 χ^2 分布，记作 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$

2. χ^2 分布的性质

1). 设 $X\sim\chi^2(n_1), Y\sim\chi^2(n_2)$，且 X, Y 独立，则有

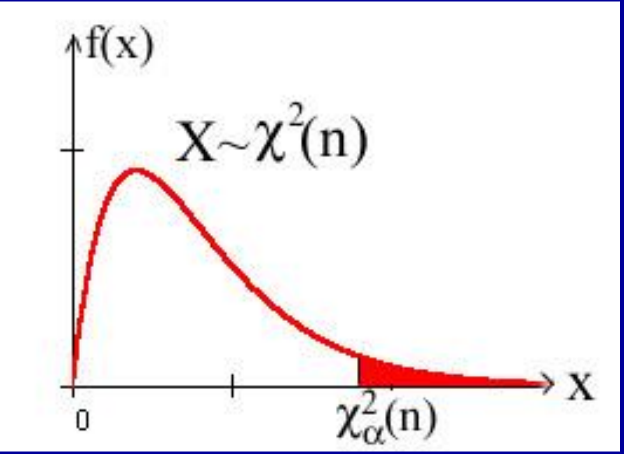
$$X+Y\sim\chi^2(n_1+n_2).\quad \text{(可加性)}$$

2). 设 $X\sim\chi^2(n)$, 则有 $E(X)=n,\quad D(X)=2n.$

3. χ^2 分布的上 α 分位点

对正数 α, $0<\alpha<1$, 称满足

$$P\{\chi^2>\chi^2_\alpha(n)\}=\int_{\chi^2_\alpha(n)}^{\infty} f(y)dy=\alpha$$



的点 $\chi^2_\alpha(n)$ 为 $\chi^2(n)$ 分布的上 α 分位点.

二、F 分布

定义2 设$X \sim \chi^2(n_1)$, $Y \sim \chi^2(n_2)$, X, Y 相互独立,

令 $$F = \frac{X / n_1}{Y / n_2} \sim F(n_1, n_2)$$

则称 F 服从为自由度为n_1， n_2 的F 分布.

3. 性质

1). 若 $F \sim F(n_1, n_2)$, 则 $\dfrac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$

2). $$F_\alpha(n_1, n_2) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_2, n_1)}$$

三、t 分布（Student 分布）

定义3 设 $X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi^2(n)$，X, Y相互独立，

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$$

则称 T 服从自由度为 n 的 t 分布.

四、几个重要的抽样分布定理

设总体 X 的均值为 μ，方差为 σ^2，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体的一个样本，则样本均值 $\bar{X}$ 和样本方差 S^2 有

$$E(\bar{X}) = \mu, \quad D(\bar{X}) = \sigma^2/n, \qquad E(S^2) = \sigma^2$$

正态总体样本均值和样本方差的分布

（I）一个正态总体

定理 2、设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}$ 和 S^2 分别是样本均值和样本方差，则有

1)、 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1);$

2)、 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1);$

3)、 $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立；

4)、 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1);$

（II）两个正态总体

设样本$\left(X_1,\cdots,X_{n_1}\right)$和$\left(Y_1,\cdots,Y_{n_2}\right)$分别来自总体$N\left(\mu_1,\sigma_1{}^2\right)$和$N\left(\mu_2,\sigma_2{}^2\right)$

并且它们相互独立，其样本均值为 $\overline{X}$ ， $\overline{Y}$，样本方差分别为S_1^2,S_2^2,

则：1° $$\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1),$$

2° $$F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2{}^2}\sim F\left(n_1-1,n_2-1\right)$$

3° 当$\sigma_1{}^2=\sigma_2{}^2=\sigma^2$时, $$\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t\left(n_1+n_2-2\right)$$

其中$$S_\omega^2=\frac{\left(n_1-1\right)S_1^2+\left(n_2-1\right)S_2^2}{n_1+n_2-2},S_\omega=\sqrt{S_\omega^2}$$

16. 设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自正态总体 $X \sim N(0,4)$ 的样本,则当 $a =$ ______ 时,

$Y = a(X_1+2X_2)^2 + a(X_3-2X_4)^2 \sim \chi^2(2)$.

17. 在总体 $N(\mu,1)$ 中抽取容量为 17 的一组样本，其中 μ 未知，则 $D(S^2) =$ ______

18. 若 $X_1,\cdots X_4$ 是取自正态总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，则随机变量 $\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}} \sim$ ____.

3.在总体$X\sim N(12,4)$中随机地抽一容量为5的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$

(1)求样本均值与总体均值之差的绝对值大于1的概率。

解： $P\{|\overline{X}-12|>1\}=P\{\overline{X}-12>1\}+P\{\overline{X}-12<-1\}$

$$=P\left\{\frac{\overline{X}-12}{2/\sqrt{5}}>\frac{1}{2/\sqrt{5}}\right\}+P\left\{\frac{\overline{X}-12}{2/\sqrt{5}}<-\frac{1}{2/\sqrt{5}}\right\}=1-\Phi(1.12)+\Phi(-1.12)$$

$$=2\times[1-\Phi(1.12)]=2\times[1-0.8686]=0.2628$$

(2)求概率 $P\{\max(X_1,X_2,\cdots,X_5)>15\}$

解： 令 $Z=\max(X_1,X_2,\cdots,X_5)$ $F_Z(z)=F_X(z)^5$

$$P\{\max(X_1,X_2,\cdots,X_5)>15\}=P\{Z>15\}=1-P\{Z\le 15\}$$

$$=1-F_X{}^5(15)=1-[\Phi(\frac{15-12}{2})]^5=1-(0.9332)^5=0.2923$$

(3)求概率 $P\{\min(X_1,X_2,\cdots,X_5)<10\}$

解： 令 $Z=\min(X_1,X_2,\cdots,X_5)$ $F_Z(z)=1-[1-F_X(z)]^5$

$$P\{\min(X_1,X_2,\cdots,X_5)<10\}=P\{Z<10\}=F_Z(10)$$

$$=1-[1-F_X(10)]^5=1-[1-\Phi(\frac{10-12}{2})]^5=1-\Phi(1)^5=1-(0.8413)^5=0.5785$$

2.设 $X_1, X_2, \cdots, X_{16}$ 是取自具有 $\chi^2(n)$ 分布的总体的样本，$\overline{X}$ 与 S^2 分别为样本均值与样本方差求 $E(\overline{X}), D(\overline{X}), E(S^2)$

解：设总体为 X $\quad E(X) = n, D(X) = 2n$

$$E(\overline{X}) = E(X) = n$$

$$D(\overline{X}) = \frac{D(X)}{16} = \frac{2n}{16} = \frac{n}{8}$$

$$E(S^2) = D(X) = 2n$$

第七章 参数估计

1、能够熟练求出样本值的矩估计量、最大似然估计量

2、了解估计量的评选标准，并能够判断所求估计量符合哪个标准

3、会求双侧和单侧置信区间

设总体的分布函数中含有k个未知参数$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$,

Step 1 计算总体的矩

$$\mathrm{E}X^{i}=\mathrm{g}_i(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)=\mu_i \qquad i=1,2,\ldots,k$$

Step 2 解方程组

$$\theta_j=\mathrm{h}_j(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k) \qquad j=1,2,\ldots,k$$

Step 3 用样本矩A_i估计总体矩μ_i

即可得诸 θ_j 的矩估计量：

$$\hat{\theta}_j=h_j(A_1,A_2,\cdots,A_k) \qquad j=1,2,\ldots,k$$

矩估计量的观察值称为矩估计值.

求参数的最大似然估计的一般步骤

Step1. 计算样本的似然函数

1）若总体是离散型R.V，似然函数为样本的联合概率

$$\mathrm{L}(\theta)=\boldsymbol{P}(\mathrm{X}_1=\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{X}_\mathrm{n}=\mathrm{x}_\mathrm{n})$$

2）若总体是连续型R.V，似然函数为样本的联合密度

$$L(\theta)=L(\theta;x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$$

Step2. 求似然函数或对数似然函数的极大值点 $\hat{\theta}_L$

$$L(\hat{\theta}_L;x_1,\cdots,x_n)=\max_{\theta\in\Theta}L(\theta;x_1,\cdots,x_n)$$

$$\ln\mathrm{L}(\hat{\theta}_\mathrm{L};\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_\mathrm{n})=\max_{\theta\in\Theta}\ln\mathrm{L}(\theta;\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_\mathrm{n})$$

求函数极大值的常用方法

1. 驻点法：求似然函数或对数似然函数的驻点

一阶导数为0，二阶导数小于0的点为函数的极大值点

$$\frac{d\mathrm{L}(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\Big|_{\hat{\theta}}=0,\ \frac{d^2\mathrm{L}(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2}\Big|_{\hat{\theta}}<0 \qquad \frac{d\ln\mathrm{L}(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\Big|_{\hat{\theta}}=0,\ \frac{d^2\ln\mathrm{L}(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2}\Big|_{\hat{\theta}}<0$$

若 θ 是向量，上述方程必须用方程组代替 .

2. 分析似然函数的单独性

如果似然函数是单调函数，则在区间端点处取到极值

估计量的评选标准

1．相合性

2．无偏性

3．有效性

1、相合性

设 $\hat{\theta}_n=\hat{\theta}_n(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是总体参数$\theta$的估计量. 若对于任意的$\theta\in\Theta$, 当$n\to\infty$时, $\hat{\theta}_n$依概率收敛于θ, 即 $\forall\varepsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty}P(|\hat{\theta}_n-\theta|\geq\varepsilon)=0$$

$\hat{\theta}_n$是总体参数θ的一致(或相合)估计量.

相合估计量仅在样本容量 n 足够大时, 才显示其优越性.

2、无偏性

设 $\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$ 是未知参数θ 的估计量，若

$E(\hat{\theta})=\theta$ 则称 $\hat{\theta}$为θ 的无偏估计 .

3、有效性

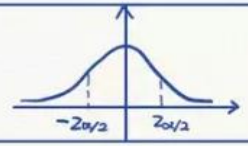
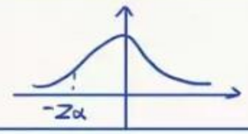
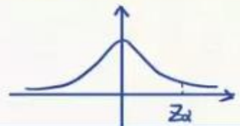
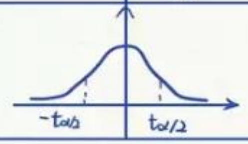
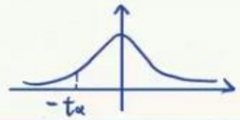
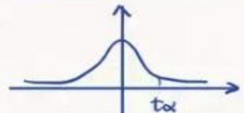
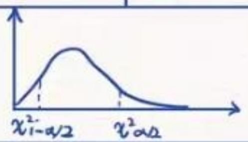
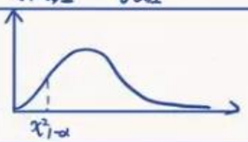
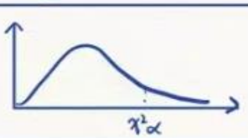
定义 设 $\hat{\theta}_1=\theta_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ $\hat{\theta}_2=\theta_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

都是总体参数θ的无偏估计量, 且

$$\mathrm{D}(\hat{\theta}_1)<\mathrm{Var}(\hat{\theta}_2)$$

则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效.

单个正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 均值 μ 和方差 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

待估参数	其他参数情况	枢轴量及其分布	分位点图	置信区间
μ	σ^2已知	$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$		双侧 $\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$
				单侧上限 $\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha}$
				单侧下限 $\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha}$
μ	σ^2未知	$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$		双侧 $\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\ \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$
				单侧上限 $\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)$
				单侧下限 $\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)$
σ^2	μ未知	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$		双侧 $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$
				单侧上限 $\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$
				单侧下限 $\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}$

19. 设 $X_1, X_2, \mathrm{L}\ , X_\mathrm{n}$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本，σ^2 已知，则总体均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为______________________

20. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, \cdots X_n$ 是取自 X 的简单随机样本， 则方差 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为____________________.

七、1. 设总体 X 的密度函数为 $p(x,\ \theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta} & 0<x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，$\theta>-1$ 未知，

$X_1,X_2,\cdots X_n$ 是取自总体 $\boldsymbol{X}$ 的样本，$x_1,x_2,\cdots x_n$ 为相应的样本值，求参数 θ 的矩估计量和最大似然估计量.

2.设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
p	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

，其中

$\theta(0<\theta<1)$ 是未知参数，利用总体 X 的如下样本值 1，3，2，3，1，2，

求参数 θ 的矩估计值和最大似然估计值。

3. 设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$，它的概率密度函数为 $f(x;\sigma^2)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right)$

其中 σ^2 为未知参数. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本

(1) 求 σ^2 的极大似然估计量 $\widehat{\sigma}_1^2$；　　(2) 求 σ^2 的矩估计量 $\widehat{\sigma}_2^2$.

(3) 证明 $\widehat{\sigma}_1^2$ 是 σ^2 的无偏、相合估计；

5. 设总体X的密度函数为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{2}{\theta}xe^{-\frac{x^2}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体X的简单随机样本。

(1)求参数θ的最大似然估计。

设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是来自总体X的简单随机样本值。

最大似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}\frac{2^n}{\theta^n}x_1x_2\cdots x_ne^{-\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{\theta}} & x_i>0\\ 0 & x_i\le 0\end{cases}$$

$$\ln L(\theta)=n\ln 2-n\ln\theta+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{\theta}\qquad \frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0$$

最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}$

最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}$

(2)问最大似然估计量是否是无偏的。

最大似然估计量为 $\hat{\theta} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}$

$$E(\hat{\theta}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = \frac{1}{n} nE(X^2) = E(X^2)$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{+\infty} x^2 \frac{2}{\theta} x e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx = \theta \qquad E(\hat{\theta}) = \theta$$

最大似然估计量是无偏的。

(3)问最大似然估计量是否是 θ 的相合的估计量。

由辛钦大数定律知 $\hat{\theta} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = A_2 \xrightarrow{P} E(X^2) = \theta$

所以 $\hat{\theta} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 是 θ 的相合估计量

第八章 假设检验

1、掌握假设检验的概念及步骤。

2、假设检验的两类错误

3、熟练掌握单个正态总体均值、方差的检验

4、熟练掌握两个正态总体均值差、方差比的检验

5、了解置信区间和假设检验之间的关系

假设检验的一般步骤（四步曲）

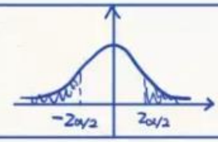
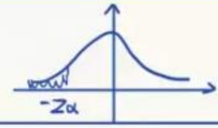
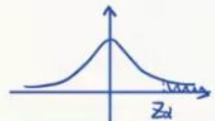
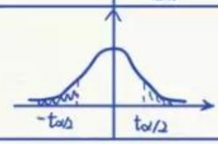
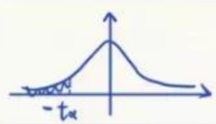
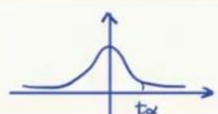
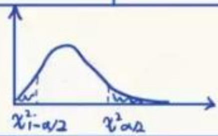
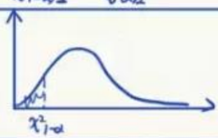
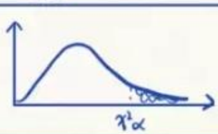
第一步：根据实际问题提出原假设 H_0 和备择假设 H_1

第二步：选取适当的检验统计量，并在 H_0 为真的条件下该统计量的分布已知，并能衡量差异的大小。

第三步：根据显著性水平 α ，求拒绝域。

第四步：计算检验统计量的观测值，检验其是否落入拒绝域，从而作出决策，是接受 H_0 ，还是拒绝 H_0

单个正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 均值 μ 和方差 σ^2 的假设检验

H_0	H_1	检验统计量及其分布	拒绝域图	拒绝域
$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	σ^2 已知 $z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$		$\|z\|\geq z_{\alpha/2}$
$\mu\geq\mu_0$	$\mu<\mu_0$			$z\leq -z_\alpha$
$\mu\leq\mu_0$	$\mu>\mu_0$			$z\geq z_\alpha$
$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	σ^2 未知 $t=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$		$\|t\|\geq t_{\alpha/2}(n-1)$
$\mu\geq\mu_0$	$\mu<\mu_0$			$t\leq -t_\alpha(n-1)$
$\mu\leq\mu_0$	$\mu>\mu_0$			$t\geq t_\alpha(n-1)$
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	μ 未知 $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$		$\chi^2\geq\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ 或 $\chi^2\leq\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$
$\sigma^2\geq\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$			$\chi^2\leq\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
$\sigma^2\leq\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$			$\chi^2\geq\chi^2_\alpha(n-1)$

八、1.某厂生产的某种型号的电池，其寿命长期以来服从方差 5000 (小时 ^{2})的正态分布。现在从生产情况来看，寿命的波动性有所改变。随机取 26 只电池，测出其寿命的样本方差 $s^2=9600$ (小时 ^{2})。试检验 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2=5000, H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$ (取 $\alpha=0.01$；备用数据：

$\chi^2_{0.005}(25)=46.93, \chi^2_{0.005}(26)=48.29, \chi^2_{0.995}(25)=10.52, \chi^2_{0.995}(26)=11.16$)。

2.设某次考试的学生成绩服从正态分布，从中随机的抽取 36 位考生的成绩，算得平均成绩为 66.5，标准差为 15 分．(1) 问在显著水平 $\alpha=0.05$ 下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分？(2) 在显著水平 $\alpha=0.05$ 下，是否可以认为这次考试考生的成绩的方差为 16^2？

3.某种导线，要求其电阻的标准差不得超过 0.005(Ω).今在生产的一批导线中取样品 9 根，测得 s=0.007(Ω).总体为正态分布，参数均未知。问在 α=0. 05 下能否认为这批导线的标准差显著地偏大？